Université Abdelmalek Essaadi
Ecole Nationale des Sciences Appliquées - Tétouan.
Cycle Classes Préparatoires. 1ère année. S2.
Module : Mathématiques 3 : Analyse 2.

Série 1. Equations différentielles.

Exercice 1. Résoudre les équations différentielles (où y est à valeurs réelles) sur tout intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$:

a) $(1+x^2)\,y' + 4xy = 0.$ b) $x^n y' - \alpha y = 0.$ $(n,\alpha) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}_+^*.$

Exercice 2. Résoudre les équations différentielles linéaires du premier ordre suivantes ($y\ I \to \mathbb{R}$, I intervalle ouvert de $\mathbb{R}$)

a) $(1+x^2)\,y' + (x-1)^2\,y = x^3 - x^2 + x - 1.$ b) $y' + 2xy = \exp(x - x^2).$

c) $xy' - y = x^2 + 1.$ d) $x(x^2-1)\,y' + 2y = x^2.$

e) $(\exp(x) - 1)\,y' + (\exp(x) + 1)\,y = 3 + 2\exp x.$ f) $(\sin x)\,y' - (\cos x)\,y = \sin x.$

Exercice 3. Résoudre $yy' + y^2 = \frac{1}{2}\exp(-2x)$ (poser $z = y^2$)

Exercice 4. Résoudre les équations différentielles suivantes où $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ désigne la fonction inconnue supposée deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$:

1) $y'' - 3y' + 2y = (x^2+1)\exp x.$ 2) $y'' + 2y' + y = \sin^2 x.$

3) $y'' - 2y' + y = \sin x \exp x.$ 4) $y'' + 2y' + 5y = 2x\exp(-x)\cos(2x).$

Exercice 5. Résoudre les équations différentielles suivantes où $m \in \mathbb{R}$ fixé :

1) $y'' - 2y' + my = \cos x.$ 2) $y'' + 4y = \sin mx.$ 3) $my'' - (1+m^2)\,y' + my = x\exp x.$

Exercice 6. Montrer que pour tout $m \in]0,2[$, l'équation différentielle

$$y'' + (1-2m)\,y' - 2my = \exp 2x \qquad \mathrm{E}_m$$

admet une solution et une seule y_m telle que $y_m(0) = y_m'(0) = 0$.
Prouver que $\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad y_m(x) \underset{m\to 1}{\longrightarrow} y_1(x).$

Exercice 7. Equations différentielles d'Euler.
1) Soient $a, b \in \mathbb{K}$, I intervalle de $\mathbb{R}$ tel que $I \subset \mathbb{R}_+^*$ ou $I \subset \mathbb{R}_-^*$, $k : I \to \mathbb{K}$ une application continue. Montrer que l'équation différentielle

$$x^2y'' + axy' + by = k$$

se ramène par le changement de variable $t = \ln|x|$ à une équation différentielle linéaire du second ordre à coéfficient constants.
2) Résoudre, sur tout intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$, les équations différentielles d'Euler suivantes

a) $x^2y'' + 3xy' + y = 1 + x^2.$ b) $x^2y'' + xy' + y = x\ln|x|.$

Exercice 8. Trouver toutes les applications $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) + f(-x) = x\exp x.$$

Exercice 9. Résoudre les équations différentielles suivantes :

1) $x(1+x^2)\,y' - (1+y^2) = 0.$ 2) $y' + \exp(y - x) = 0.$ 3) $x(1+x^2)\,yy' - (1+y^2) = 0.$

ETUSUP .com

Exercice 10. Résoudre les équations différentielles suivantes :
1) $y' - \frac{4}{x}y - x\sqrt{y} = 0$. 2) $x^2y' - xy + y^2 = 0$. 3) $y' - \frac{y}{x} + x^2y^4 = 0$.

Exercice 11. Résoudre les équations différentielles suivantes :
1) $2x^2y' + x^2y^2 + 1 = 0$. 2) $(1 + x^3)\, y' + x^2y + 2xy^2 + 1 = 0$. 3) $(1 - x^3)\, y' + x^2y - y^2 + 2x = 0$.

Problème 1. Soit l'équation différentielle

$$4x^3y + y' - xy'' = 0 \qquad \text{(E)}$$

1) Montrer que si $y = f(x)$ est solution de (E), il en est de même de $y = f(-x)$.
2) On demande de résoudre l'équation (E) successivement des deux manières suivantes :
a) Vérifier que la fonction $x \mapsto \cosh x^2$ est solution de (E). En déduire la solution générale de (E).
b) Effectuer dans (E) le changement de variable $t = x^2$. En déduire la solution générale de (E).
3) Soit λ un nombre positif quelconque. Résoudre l'équation différentielle

$$4\lambda x^3y + y' - xy'' = 0$$

en la ramenant à (E) par un changement de variable.

Problème 2. Soit y une fonction réelle de la variable réelle x admettant des dérivées première et seconde continues. On pose (1) $\begin{cases} x & = & \sinh u \\ z(u) & = & y(x)\cosh u \end{cases}$
1) Calculer $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ en fonction de u, $z(u)$, $\frac{dz}{du}$ et $\frac{d^2z}{du^2}$.
2) Soit

$$(x^2 + 1)\, y''(x) + 3xy'(x) + (1 - n^2)\, y(x) = 0, \quad (n \text{ entier ¿1}) \qquad \text{(E)}$$

En faisant le changement de variable et de fonction (1), montrer que (E) se transforme en

$$z''(u) - n^2z(u) = 0. \qquad \text{(E}'\text{)}$$

3) Intégrer (E'). En déduire la solution générale de (E).
4) Trouver la solution de (E) telle que $y(0) = 1$ et $y(+\infty) = 0$.

Problème 3. 1) Soit l'équation différentielle

$$(1 - x^2)\, y''(x) - xy'(x) + 4y(x) = 0, \quad (|x| \leq 1) \qquad (1)$$

Résoudre (1) en faisant le changement de variable $t = \arccos x$.
2) Soit l'équation différentielle

$$(1 - x^2)\, y''(x) - xy'(x) + 4y(x) = \arccos x. \quad (|x| \leq 1) \qquad (2)$$

a) Résoudre l'équation (2).
b) Trouver la solution de (2) telle que $y(0) = \frac{\pi}{8}$ et $y'(0) = \frac{1}{4}$.
c) Variations et graphe de la fonction.
3) Soit l'équation différentielle

$$(1 - x^2)\, y''(x) - xy'(x) + ky(x) = \arccos x, \quad (|x| \leq 1 \text{ et } k \in \mathbb{N}) \qquad (3)$$

a) En effectuant le changement de variable $t = \arccos x$, trouver la solution générale de (3).
b) On pose $k = 3$. Montrer que l'équation (3) admet une solution polynôme.
c) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'équation (3) admet une solution polynôme.

ETUSUP .com

Problème 4. Le but de ce problème est de donner une méthode pratique pour résoudre les équations différentielles de la forme

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = Q(t)\exp(\lambda t) \tag{1}$$

où a, b et λ sont des constantes et Q un polynôme de degré q. Cette méthode évite les calculs d'identification. On pose D l'opérateur dérivation tel que $Dy = y'$

$$y'' + ay' + by = D^2y + aDy + by = \left(D^2 + aD + b\right)y = P(D)\,y$$

avec $P(D) = D^2 + aD + b$.
Le changement de fonction $z(t) = \exp(-\lambda t)\,y(t)$ implique que $z(t)$ vérifie

$$P(D)\left[\exp(\lambda t)\,z(t)\right] = \exp(\lambda t)\,Q(t) \tag{2}$$

1) Montrer que

$$P(D)\left[\exp(\lambda t)\,z(t)\right] = \exp(\lambda t)\,P(D+\lambda)\,z(t) \qquad \forall \lambda \in \mathbb{C}$$

où $P(D+\lambda)$ est le polynôme de dérivation associé au polynôme $P(X+\lambda)$.

2) D'après la question 1), (1) devient

$$P(D+\lambda)\,z(t) = Q(t) \tag{3}$$

A admettre. Lorsque λ n'est pas zéro du polynôme $P(X)$ alors $P(D+\lambda)$ est inversible et on aura

$$z(t) = \frac{1}{P(D+\lambda)}Q(t)$$

et à l'aide de la décomposition en fractions rationnelles de $\frac{1}{P(D+\lambda)}$ on en déduit $z(t)$.

3) Si λ est racine d'ordre α de P, on peut poser $P(X+\lambda) = X^{\alpha}R(X)$ où le polynôme R vérifie $R(0) \neq 0$ ($\Rightarrow$ $R(X)$ inversible)

$$P(D+\lambda)\,z(t) = Q(t)$$

$$R(D).D^{\alpha}z(t) = Q(t)$$

$$D^{\alpha}z(t) = \frac{1}{R(D)}Q(t).$$

On écrit $\frac{1}{R(D)}$ en fonction des fractions rationnelles, puis on intégre α fois pour obtenir $z(t)$ et par suite $y(t) = \exp(\lambda t)\,z(t)$.

Applications. Résoudre les équations différentielles suivantes

a) $y'' - 3y' + 2y = x^3\exp(x)\cos x$.

b) $y'' - 2ay' + a^2y = x^2\exp(x)\cos mx, \quad m, a \in \mathbb{R}^*$.

ETUSUP .com

S 2 . TD . Analyse .

Série 1 :

Exercice 2 :

c) $xy' - y = x^2 + 1$

c'est une éq diff. linéaire du 1er ordre avec second membre non null et coeff en y' s'annule en 0

si $0 \notin I$

Normalisation :

$(E) \Leftrightarrow y' - \frac{y}{x} = x + \frac{1}{x}$

$y = y_0 + y_p \quad \begin{cases} y_0 = \text{sol de l'éq} \\ y_p = \text{sol particulière} \end{cases}$

$y_0 = \lambda e^{\int \frac{1}{x} dx}$

$= \lambda e^{\ln|x|} = \lambda |x|$ (Th. 1 du cours)

$= \lambda \varepsilon x$ avec $\varepsilon_0 \begin{cases} +1 \text{ si } I \cap \mathbb{R}_+^* \\ -1 \text{ si } I \cap \mathbb{R}_-^* \end{cases}$

Cherchons y_p par la méthode de la variation de la cste : $y_p = \lambda(x) \varepsilon x$

$\lambda'(x) = \frac{x + \frac{1}{x}}{\varepsilon x} = \varepsilon \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$

$\Rightarrow \lambda(x) = \int \varepsilon \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) dx = \varepsilon \left(x - \frac{1}{x}\right)$

$\Rightarrow y_p = \left(x - \frac{1}{x}\right) x = x^2 - 1$

Donc dans le cas où $0 \notin I$ $\quad y = y_p + y_0$

$$S = \left\{ \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow y(x) = \begin{cases} \lambda x + x^2 - 1 \text{ sur } I \cap \mathbb{R}_+^* \\ -\mu x + x^2 - 1 \text{ sur } I \cap \mathbb{R}_-^* \end{cases} \end{array} \right\} \quad \mu, \lambda \in \mathbb{R}$$

si $0 \in I$

- Raccord par continuité en 0

ETUSUP .com

$$\lim_{x\to 0^-} (-\mu x + x^2 - 1) = -1$$

$$y(0) = -1$$

$$\lim_{x\to 0^+} (\lambda x + x^2 - 1) = -1$$

Donc on a raccord par continuité en 0

- Raccord par dérivabilité en 0 :

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{-\mu x + x^2 - 1 - y(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-\mu x + x^2}{x} = -\mu$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\lambda x + x^2 - 1 - y(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \lambda + x = \lambda$$

On a raccord par dérivabilité en 0 ssi $\lambda = -\mu$

du coup $y'(0) = \lambda$

et y devient $y(x) = \begin{cases} \lambda x + x^2 - 1 & (I \cap \mathbb{R}_-^*) \cup (I \cap \mathbb{R}_+^*) \\ -1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ $\quad I \setminus \{0\}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

Vérifions (E) $\lambda x + x^2 - 1$ si cas raccords vérifient (E)

$(0)\ \lambda - (-1) = 1$

$\Leftrightarrow 1 = 0^2 + 1 \Rightarrow$ OK

Si $0 \in I$

$$S = \left\{ \begin{array}{l} I \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \lambda x + x^2 - 1,\ \lambda \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$$

d - $x(x^2-1)y' + 2y = x^2$

c'est une éq. diff linéaire du 1er ordre avec S.M

coeff de y' s'annulle en $\begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$

Supp que $\{0, -1, 1\} \notin I$

$$\Rightarrow y' + \frac{2}{x(x^2-1)} y = \frac{x^2}{x(x^2-1)} = \frac{x}{x^2-1} \ (*) \quad (E)$$

La solution générale de (E_0) S.S.M après normalisation :

$$y_0(x) = \lambda e^{-\int \frac{2}{x(x^2-1)} dx}$$

* $\int \frac{2}{x(x^2-1)}\,dx = \int \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+1}$

$\boxed{a = -2}$ $\boxed{b = 1}$ $\boxed{c = 1}$

$$\int \frac{2}{x(x^2-1)}\,dx = -2\ln|x| + \ln|x-1| + \ln|x+1|$$
$$= -\ln|x| + \ln|x-1|$$
$$= \ln\left|\frac{x^2-1}{x^2}\right| = \ln\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right)$$

$$\Rightarrow y_0 = \lambda\, e^{\ln\left(\frac{x^2}{x^2-1}\right)}$$

$$\Rightarrow y_0 = \frac{\lambda x^2}{|x^2-1|} = \frac{\varepsilon \lambda x^2}{x^2-1}$$

avec :

$$\varepsilon = \begin{cases} +1 & I \cap \left(]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[\right) \\ -1 & I \cap]-1, 1[\end{cases}$$

$0 \notin I$

y_p ?

La solution particulière (la méthode de la variation de la cste)

$$y_p = \lambda(x)\, y_0(x)$$

$$\lambda'(x) = \frac{\frac{x}{x^2-1}}{\frac{\varepsilon x^2}{x^2-1}} = \frac{1}{\varepsilon x} = \frac{\varepsilon}{x}$$

$$\Rightarrow \lambda(x) = \int \frac{\varepsilon}{x}\,dx = \varepsilon \ln|x|$$

$$\Rightarrow y_p = \varepsilon \ln|x| \cdot \frac{\varepsilon x^2}{x^2-1} = \frac{x^2 \ln|x|}{x^2-1}$$

~~Alors~~ :

$$\cancel{S = \left\{ I \to \mathbb{R},\ x \mapsto \underbrace{\frac{x^2 \ln|x|}{x^2-1}}_{y_1} + \underbrace{\frac{\lambda \varepsilon x^2}{x^2-1}}_{y_0} \right\}}$$

~~Si $0 \in I$~~

~~• raccord en 0 par continuité~~

$$y = \frac{x^2 \ln|x|}{x^2-1} + \frac{\lambda \varepsilon x^2}{x^2-1}$$

$\boxed{\text{si } 0 \notin I \text{ et } \pm 1 \notin I}$

$\varepsilon^2 = 1$

ETUSUP .com

$$S : y(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 \ln(-x)}{x^2-1} + \lambda_1 \dfrac{x^2}{x^2-1} & \text{sur } I \cap]-\infty,-1[\\ \dfrac{x^2 \ln(-x)}{x^2-1} - \lambda_2 \dfrac{x^2}{x^2-1} & \text{sur } I \cap]-1,0[\\ \dfrac{x^2 \ln(x)}{x^2-1} - \lambda_3 \dfrac{x^2}{x^2-1} & \text{sur } I \cap]0,1[\\ \dfrac{x^2 \ln(x)}{x^2-1} + \lambda_4 \dfrac{x^2}{x^2-1} & \text{sur } I \cap]1,+\infty[\end{cases}$$

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R} \}$

• $\boxed{\text{si } -1 \in I \text{ et } 0 \notin I \text{ et } +1 \notin I}$

$$\lim_{x \to -1^-} y(x) = \lim_{x \to -1^-} \frac{x^2 \ln(-x)}{x^2-1} + \lambda_1 \frac{x^2}{x^2-1}$$

$$= \lim_{x \to -1^-} \frac{x^2 \ln(-x) - \ln(1)}{(x^2-1)(x+1)} + \lambda_1 \frac{\overset{=(-1)^2}{1}}{(x-1)(x+1)}$$

$$= \lim_{x \to -1^-} \frac{x^2}{1-x} \cdot 1 + \lambda_1 (+\infty)$$

$$= \frac{1}{2} + \lambda_1 (+\infty)$$

$$\lim_{x \to -1^+} y(x) = \lim_{x \to -1^+} \frac{x^2 \ln(-x)}{x^2-1} - \lambda_2 \frac{x^2}{x^2-1} = \frac{1}{2} + \lambda_2 (+\infty)$$

On a raccord par continuité en -1 ssi $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$

du coup $y(-1) = \frac{1}{2}$

$$y(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 \ln(-x)}{x^2-1} & \text{sur } I \cap]-\infty,-1[\\ \dfrac{x^2 \ln(-x)}{x^2-1} & \text{sur } I \cap]-1,0[\\ \dfrac{1}{2} & \text{si } x = -1 \\ y_3 = \dots &]0,1[\\ y_4 = \dots &]1,+\infty[\end{cases}$$

• raccord par dérivabilité en (-1)

$$\lim_{x \to -1} \frac{y(x) - y(-1)}{x+1} = \lim_{x \to -1} \frac{\ln(-x)\frac{x^2}{x^2-1} - 1/2}{x+1}$$

On sait D.L de ln au $\vartheta(0)$

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \theta(t^{n+1}) \quad t \in \vartheta(0)$$

$$\left| \frac{\theta(t^{n+1})}{t^{n+1}} \right| < \lambda \quad \text{au } \vartheta(0)$$

$$\ln(-x+1-1) = (-x-1) - \frac{(+x+1)^2}{2} + \frac{(-x-1)^3}{3} - \dots$$

$$\frac{\ln(-x) \cdot \frac{x^2}{x^2-1} - 1/2}{x+1} = \frac{\ln(-x)}{(x+1)^2} \cdot \frac{x^2}{x-1} - \frac{1}{2(x+1)}$$

$$= \frac{\left(-(x+1) - \frac{(x+1)^2}{2} + \theta(-(x+1)^3)\right)}{(x+1)^2} \cdot \frac{x^2}{x-1} - \frac{1}{2(x+1)}$$

$$= \left(-\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2} + \frac{\theta((x+1)^3)}{(x+1)^2}\right) \cdot \frac{x^2}{x-1} - \frac{1}{2(x+1)}$$

$$= \frac{1}{x+1}\left(-\frac{x^2}{x-1} - \frac{1}{2}\right) - \frac{x^2}{2(x-1)} + \underbrace{\frac{\theta((x+1)^3)}{(x+1)^2} \cdot \frac{x^2}{x-1}}$$

$$= \frac{1}{x+1}\left(\frac{-2x^2 - x + 1}{2(x-1)}\right) - \frac{x^2}{2(x-1)} + \mathcal{F}(x)$$

$$= \frac{1}{\cancel{x+1}}\left(\frac{-x\cancel{(x+1)} + (1-x)(1+x)}{2(x-1)}\right) - \frac{x^2}{2(x-1)} + \mathcal{F}(x)$$

$$= \frac{1-2x}{2(x-1)} - \frac{x^2}{2(x-1)} + \mathcal{F}(x)$$

$$\lim_{x \to -1} \frac{y(x) - y(-1)}{x+1} = \lim_{x \to -1} \frac{1-2x-x^2}{2(x-1)} + \mathcal{F}(x) = -1/2 + \lim \frac{\theta((x+1)^3)(x+1)^3}{(x+1)^3(x+1)^2} \cdot \frac{x^2}{x-1}$$

$$= -1/2 + 0$$

$$y'(-1) = -1/2$$

<u>Verifications</u> :

$$0 \cdot y'(-1) + 2y(-1) = 1 = (-1)^2$$

$$S_2 = \begin{cases} I \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} \ln(-x) \cdot \frac{x^2}{x^2-1} & \text{sur } I \cap (]-\infty,-1[\cup]-1,0[) \\ 1/2 & x = -1 \end{cases} \end{cases}$$

ETUSUP .com

Cas 3 $\boxed{1 \in I \ , 0 \notin I \ , -1 \in I}$

Raccord par continuité 1

* $\lim\limits_{x \to 1^+} y(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x^2 \ln(x)}{x^2-1} + \lambda_4 \dfrac{x^2}{x^2-1}$

$$= \lim_{x \to 1^+} \frac{x^2}{x+1} \frac{\ln(x) - \ln(1)}{x-1} + \lambda_4 \frac{x^2}{(x-1)(x+1)}$$

$$= 1/2 + \lambda_4 (+\infty)$$

* $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x^2 \ln(x)}{x^2-1} + \lambda_3 \dfrac{x^2}{x^2-1} = 1/2 + \lambda_3 (+\infty)$

on a raccord par continuité en (1) si et seulement

$\lim\limits_{x \to 1^+} y(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} y(x)$ c-à-d si $\lambda_3 = \lambda_4 = 0$

$y(1) = 1/2$

raccord par dérivabilité en 1

On a $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{y(x) - y(1)}{x-1}$

on pose $t = -x$ $\quad \lim\limits_{t \to -1} \dfrac{y(-t) - y(1)}{-t-1}$

$$= \lim_{t \to -1} \frac{\frac{t^2 \ln(t)}{t^2-1} - 1/2}{-t-1} = 1/2 \quad \text{(D'après le calcul de } y'(-1))$$

$y'(1) = 1/2$

Vérifications : $\quad 0 \cdot \underbrace{\frac{1}{2}}_{y(1)} + 2 \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)}_{y(1)} = 1 = (1)^2 \to$ ok

donc on a raccord par dérivabilité en 1

$$S_3 = \begin{cases} I \to \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} \ln(x) \cdot \dfrac{x^2}{x^2-1} & \text{sur } I \cap (]0,1[\cup]1,+\infty[) \\ 1/2 & x = 1 \end{cases} \end{cases}$$

Cas 4 : $0 \in I$ et $-1, 1 \notin I$

Raccord par continuité en 0

$\cancel{\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 \ln(x)}{x^2-1} + \lambda_1 \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{x^2-1} \underbrace{x \ln(x)}_{0} = 0}$

~~Alors~~ ~~$y(0)=0$~~

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{x^2\ln(-x)}{x^2-1} - \lambda_2 \frac{x^2}{x^2-1}$$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{x}{1-x^2}\left(-x\ln(-x)\right) - \lambda_2 \frac{x^2}{x^2-1} = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2\ln(x)}{x^2-1} - \lambda_3 \frac{x^2}{x^2-1} = 0$$

On a raccord par continuité en 0 et $y(0)=0$

- Raccord par dérivabilité en 0

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{x^2\ln(x)}{x^2-1} - \lambda_3 \frac{x^2}{x^2-1}}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{x\ln(x)}{x^2-1} - \lambda_3 \frac{x}{x^2-1} = 0$$

$$\lim_{x\to 0^-} \left(\frac{x^2\ln(-x)}{x^2-1} - \lambda_2 \frac{x^2}{(x^2-1)}\right)\frac{1}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{-x\ln(-x)}{1-x^2} - \lambda_2 \frac{x}{x^2-1} = 0$$

Alors on a raccord par dérivabilité en 0 $\quad y'(0)=0$

<u>Verifications</u>.

$$x(x^2-1)y' + 2y = x^2$$

pour $x=0$ on a $0.y'(0) + 2y(0) = 0 = 0^2$

Alors :

$$S_4 = \begin{cases} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} \frac{x^2\ln(-x)}{x^2-1} - \lambda_2 \frac{x^2}{x^2-1} & \text{sur } I \cap (]-1,0[) \\ \frac{x^2\ln(x)}{x^2-1} - \lambda_3 \frac{x^2}{x^2-1} & \text{sur } I \cap (]0,1[) \\ 0 & x=0 \end{cases} \end{cases}$$

$\lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$

<u>Cas 5</u>: $0 \in I$, $\pm 1 \in I$

- on a raccord en 0 $\quad \forall \lambda$
- " " " " -1 si $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$
- " " " " 1 si $\lambda_3 = \lambda_4 = 0$

ETUSUP .com

$$S_5 = \begin{cases} I \to \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} \ln|x| \cdot \dfrac{x^2}{x^2-1} & \text{si } (I \cap \mathbb{R}) \setminus \{0, \pm 1\} \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } x = \pm 1 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{cases}$$

f/ $\sin(x)\, y' - (\cos x)\, y = \sin x$

1er cas : $\sin x \neq 0$

$\Leftrightarrow x \neq k\pi$

$\Leftrightarrow I \subset]k\pi, (k+1)\pi[$

Normalisation :

*

2ème cas : $\sin x = 0$

$\Leftrightarrow x = k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

. Raccord par continuité en $k\pi$

$\lim\limits_{x \to (k\pi)^-} y(x) = \ldots$

* $y' - \dfrac{\cos x}{\sin x}\, y = 1$

$y_0 = \varepsilon \lambda \sin(x) \qquad \varepsilon = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in I \cap]2k\pi, (2k+1)\pi[\\ -1 & \text{si } x \in I \cap](2k+1)\pi, 2k\pi[\end{cases}$

$k \in \mathbb{Z}$

$y_p = \dfrac{1}{2} \ln\left|\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2}\right)\right| \sin x$

<u>Ex 3</u> :

$$yy' + y^2 = \frac{1}{2} e^{-2x}$$

on pose $z = y^2 \Rightarrow z' = 2yy'$

$\Rightarrow \dfrac{z'}{2} = yy'$

$$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{z'}{2} + z = \dfrac{1}{2} e^{-2x} \\ z \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z' + 2z = e^{-2x} \\ z \geq 0 \end{cases}$$

* $z' + 2z = 0 \Rightarrow z_0(x) = \lambda e^{-\int 2\,dx} = \lambda e^{-2x}$

$\Rightarrow \boxed{z_0(x) = \lambda e^{-2x}}$ solution de E.S.S.M

ETUSUP .com

+ on va utiliser la méthode de la variation de la cste

$Z_p(x) = \lambda(x)\ e^{-2x}$

Alors $\lambda'(x) = \dfrac{e^{-2x}}{e^{-2x}} = 1$

$\Rightarrow \lambda'(x) = 1 \Rightarrow \lambda(x) = x$

$\Rightarrow Z_p(x) = x\, e^{-2x} \Rightarrow \begin{cases} Z(x) = (x+\lambda)\, e^{-2x} \\ Z \geqslant 0 \end{cases}$

$$S_Z = \left\{ \begin{array}{l} [-\lambda, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}' \\ x \longmapsto (x+\lambda)\, e^{-2x} \end{array} \quad \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

On a $y^2 = Z = (x+\lambda)\, e^{-2x}$

donc : $y = \pm\, e^{-x} \sqrt{(x+\lambda)}$

$$S_y = \left\{ \begin{array}{l} [-\lambda, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto e^{-x} \sqrt{(x+\lambda)} \end{array} \right\} \cup \left\{ \begin{array}{l} [-\lambda, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto -e^{-x} \sqrt{(x+\lambda)} \end{array} \right\}$$

Ex 4 :

$y'' - 3y' + 2y = (x^2+1)\, e^x$

$(E) : y'' - 3y' + 2y = (x^2+1)\, e^x$

c'est une ~~solution~~ eq. diff. du 2ème ordre linéaire à coef A.S.M

$(E_0) : y'' - 3y' + 2y = 0$

l'éq caractéristique $r^2 - 3r + 2 = 0$

$r_1 = 1$ et $r_2 = 2$

donc la solution de (E_0) : $y_0 = \lambda_1 e^x + \lambda_2 e^{2x}$

la solution particulière s'écrit sous forme : $y_p(x) = e^{m_1 x}\, Q(x)$

avec $m_1 = 1$

puisque 1 est racine simple de l'éq caractéristique

donc $\deg Q = \deg P(x) + 1$ avec $P(x) = x^2 + 1$ alors $\deg Q = 3$

$Q = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$

$Q' = 3\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma$

$y_p = e^x\, Q(x)$

ETUSUP .com

$y'_p = e^x \left(Q(x) + Q'(x) \right)$

$y''_p = e^x Q'(x) + e^x Q(x) + e^x Q''(x) + e^x Q'(x) = e^x \left(Q(x) + 2Q'(x) + Q''(x) \right)$

et on a (E) : $y'' - 3y' + 2y = (x^2+1)\, e^x$

En injectant y_p dans (E), on obtient :

$$Q''(x) - Q'(x) = (x^2+1)$$

$$6\alpha x + 2\beta - 3\alpha x^2 - 2\beta x - \gamma = x^2 + 1$$

$$-3\alpha x^2 + x\,(6\alpha - 2\beta) + 2\beta - \gamma = x^2 + 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -3\alpha = 1 \\ 6\alpha - 2\beta = 0 \\ 2\beta - \gamma = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -1/3 \\ \beta = -1 \\ \gamma = -3 \end{cases}$$

donc : $Q(x) = \frac{-1}{3} x^3 - x^2 - 3x$

alors $y_p(x) = Q(x)\, e^x = \left(\frac{-1}{3} x^3 - x^2 - 3x \right) e^x$

et on écrit $y_{s.s.m} = \lambda_1 e^x + \lambda_2 e^{2x}$ $\quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow y = y_p + y_{s.s.m}$

$$S = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \lambda_1 e^x + \lambda_2 e^{2x} + e^x \left(-1/3\, x^3 - x^2 - 3x \right) \end{array} \right\}$$

avec $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

2 - $y'' + 2y' + y = \sin^2 x$

c'est une éq. diff du 2ème ordre linéaire à coeff cste avec S.M

→ Sol S.S.M (E_0) $y'' + 2y' + y = 0$

l'éq. caractéristique est $r^2 + 2r + 1 = 0$ (e.c)

$\Delta = 0$

Donc (e.c) admet une racine double $r = -1$

Donc la sol s'écrit $\boxed{y_0 = (\lambda x + \mu)\, e^{-x}}$ $\quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

→ Cherchons une sol. part y_p ?

on va linéariser d'abord $\sin^2 x$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

ETUSUP .com

(E) $y'' + 2y' + y = \frac{1-\cos 2x}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$

pri. s. p sol. particulier sera de la forme : $y_p = Q + A(x)\cos 2x + B(x)\sin 2x$

- $d^\circ(Q) = d^\circ(1/2) = 0$ car 0 n'est pas racine (e.c)
- $d^\circ(A), d^\circ(B) \leqslant d^\circ(1/2) = 0$ car $2i$ n'est pas racine de (e.c)

$d^\circ(A) = d^\circ(B) = 0$

Donc $y_p = \underbrace{Q(x)}_{} + \underbrace{A\cos 2x + B\sin 2x}_{}$ / $Q, A, B \in \mathbb{R}$

$y_p = y_{p.1} + y_{p.2}$

$y_{p.1}$ est sol particulière $y'' + 2y' + y = 1/2$

$y_{p.2}$ " " " $y'' + 2y' + y = -1/2 \cos 2x$

$y_{p.1}$? $y_{p.1}$ est une cste $\Rightarrow \boxed{y_{p.1} = 1/2}$

$y_{p.2}$? $y_{p.2} = A\cos 2x + B\sin 2x$

$y'_{p.2} = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x$

$y''_{p.2} = -4A\cos 2x - 4B\sin 2x$

on injecte dans (E) : $y'' + 2y' + y = \frac{-1}{2}\cos 2x$

$-4A\cos 2x - 4B\sin 2x - 4A\sin 2x + 4B\cos 2x + A\cos 2x$

$+ B\sin 2x = \frac{-1}{2}\cos 2x$

$\cos 2x\,(4B - 3A) + \sin 2x\,(-4A - 3B) = \frac{-1}{2}\cos 2x$

$\Rightarrow \begin{cases} 4B - 3A = -1/2 \\ -4A - 3B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{3}{50} \\ B = \frac{-2}{25} \end{cases}$

donc $y_p = \frac{3}{50}\cos 2x - \frac{2}{25}\sin 2x + \frac{1}{2}$

$\rightarrow$ sol. $S = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto (\lambda x + \mu)e^{-x} + \frac{1}{2} + \frac{3}{50}\cos 2x - \frac{2}{25}\sin 2x \end{array} \right\}$

$\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

Ex 2 :

f) $\sin(x)\,y' - \cos(x)\,y = \sin(x)$ (E)

<u>Cas 1</u> : $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq k\pi & k \in \mathbb{Z} \\ x \in I \end{cases}$

ETUSUP .com

$$\lim_{x \to ((2k\pi+1)\pi)^+} \text{———} = +\lambda_2 + \infty = +\infty$$

On a pas raccord

alors $S = \emptyset$

$a \neq 0$

* $aZ'' + bZ' + cZ = P(x)$ (1) P Polynôme de d°n

on cherche une sol. particulière de (1) sous la forme d'un polynôme $Q(x)$ avec :

$d^\circ Q = n = d^\circ P$ si $c \neq 0$

$d^\circ Q = n+1$ si $c = 0$ et $b \neq 0$

$d^\circ Q = n+2$ si $c = 0$ et $b = 0$

<u>Ex4</u> :

4) $y'' + 2y' + 5y = 2x\, e^{-x} \cos(2x)$ (1)

$= P(x)\, e^{-x} \cos(2x)$

$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$y(x) = f(x) + i\, g(x)$

$y'(x) = f'(x) + i\, g'(x)$

* <u>ESSM</u> $y'' + 2y' + 5y = 0$

$r^2 + 2r + 5 = 0$

$\Delta' = -4 = 4i^2$

$r_1 = -1 + 2i$; $r_2 = -1 - 2i$

* Les sol. $y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sont de la forme : $y = \lambda_1 e^{r_1 x} + \lambda_2 e^{r_2 x}$ $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$
* Les sol $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $y = e^{-x}(A\cos(2x) + B\sin(2x))$ $A, B \in \mathbb{R}$
* Sol particulière de (1) $y'' + 2y' + 5y = 2x\, e^{(-1+2i)x}$ (2)

on va chercher une sol particulière de (2) sous la forme

$y = Z(x)\, e^{\alpha x}$; $\alpha = -1 + 2i$

sa partie réelle sera la sol particulière de (1)

on calcul y', y'' et on remplace dans (2), on trouve : $Z'' + uZ' + vZ = 2x$

avec $u = -[(r_1 - \alpha) + (r_2 - \alpha)]$ et $v = (r_1 - \alpha)(r_2 - \alpha)$

$= 4i$ $= 0$ ($\boxed{\text{car } r_1 = \alpha}$)

on a : $Z'' + 4iZ' = 2x$ (3)

on va chercher Z de la forme $Z(x) = ax^2 + bx + c$, $a = ?$ $b = ?$ $c = ?$

ETUSUP .com

$z' = 2ax + b \qquad z'' = 2a$ on remplace ds (3)

et on identifie, on trouve : $\begin{cases} 8ai = 2 \\ 2a + 4ib = 0 \\ c \text{ qcq} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{-i}{4} \\ b = 1/8 \\ c = 0 \end{cases}$

$$y(x) = z(x)\, e^{(-1+2i)x}$$

$$= e^{-x}\left(\frac{-i}{4}x^2 + \frac{1}{8}x\right)(\cos 2x + i \sin 2x)$$

$$= e^{-x}\left(\frac{-i}{4}x^2 \cos 2x + \frac{1}{4}x^2 \sin 2x + \frac{1}{8}x \cos 2x + \frac{1}{8} i x \sin 2x\right)$$

$$y_p = e^{-x}\left(\frac{1}{4}x^2 \sin 2x + \frac{1}{8}\cos 2x\right)$$

$$S = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto y(x) = e^{-x}\left(A \cos 2x + B \sin 2x + \frac{1}{4}x^2 \sin 2x + \frac{1}{8}x \cos 2x\right) \quad A, B \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$$

Ex 5 :

1) $y'' - 2y' + my = \cos x \quad , m \in \mathbb{R}$

$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

* <u>ESSM</u> : $y'' - 2y' + my = 0$

$r^2 - 2r + m = 0$

$\Delta' = 1 - m$

- $\Delta > 0 \quad : m < 1$

$r_1 = 1 + \sqrt{1-m} \quad ; \quad r_2 = 1 - \sqrt{1-m}$

$y = \alpha e^{(1+\sqrt{1-m})x} + \beta e^{(1-\sqrt{1-m})x} \quad , \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

- $\Delta = 0 \quad , m = 1$ racine double $r_1 = r_2 = 1$

$y = (\lambda x + \mu) e^x \quad , \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

- $\Delta < 0 \, , m > 1 \qquad \Delta' = (m-1) i^2$

$r_1 = 1 + i\sqrt{m-1} \quad ; \quad r_2 = 1 - i\sqrt{m-1}$

sol. réel : $y = e^x\left(A \cos(\sqrt{m-1}\, x) + B \sin(\sqrt{m-1}\, x)\right) \quad A, B \in \mathbb{R}$

$a \neq 0$

$$ay'' + by + cy = f(x) \quad (1)$$

si $f(x) = \alpha e^{rx} \cos(wx) + \beta e^{rx} \sin(wx) \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, w \in \mathbb{R}$

on cherche une sol. particulière de (1) sous la forme :

ETUSUP .com

$y_p = A e^{rx} \cos(wx) + B e^{rx} \sin(wx)$ $\quad A, B \in \mathbb{R}$

si $z = r + iw$ n'est pas racine de l'éq. caract.

si $z = r + iw$ est sol de l'éq. caract, on cherche une sol. part sous la forme $y_p = x \left(A e^{rx} \cos(wx) + B e^{rx} \sin(wx) \right)$

ETUSUP .com

ETUSUP.com

Programmation
Cours
Informatique
Optique
Chimie
Algébre
Corrigés
Mathématiques
Travaux Pratiques
Electricité
Physique
Résumés
Analyse
Diapo
Exercices
Livres
Contrôles Continus
Langues
MTU
Mécanique
Thermodynamique
Multimedia
Divers
Economie
Travaux Dirigés
Droit
Chimie Organique

et encore plus..